吳笛物理段考複習講義－等速圓周運動

主題一：運動學公式

1. 角速度$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \times f$ ，單位：$(\dfrac{rad}{s} ; \dfrac{rev}{s} = r.p.s.)$
2. 切線速率 $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{2\pi R}{T} = \omega R$，單位：$(\dfrac{m}{s})$
3. 向心加速度 $a_c = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R$，其中 R 稱為曲率半徑

範例1

下列有關等速率圓周運動的敘述，何者正確？ (A)為等速度運動 (B)為等加速度運動 (C)若半徑一定則加速度大小與速率平方成正比 (D)若速率一定，則加速度大小與半徑成反比 (E)若週期一定，加速度大小與半徑成正比。

【答】: (C)(D)(E)

【解】

範例2

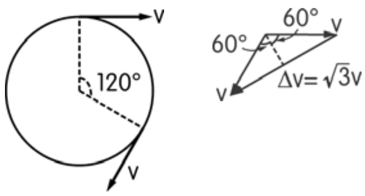
某質點在水平面內作半徑 R 之等速率圓周運動，週期為 T，則在經歷$\dfrac{T}{6}$時間內，此質點之(1)平均速度量值為【　　　　】。 (2)平均加速度量值為【　　　　】。

【答】: (1)$\dfrac{6R}{T}$　(2)$\dfrac{12\pi R}{T^2}$

【解】

立即練習

一質點作等速率圓周運動，向心加速度量值為 a，若此質點沿著圓周移動 $\frac{1}{3}$ 圓周長的運動過程中，平均加速度之量值為 $\bar{a}$，則 $\frac{\bar{a}}{a}=$？ (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ (C) $\frac{3}{2\pi}$ (D) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (E) $\sqrt{3}$ 。



【答】: (D)

【解】: 等速率圓周運動向心加速度 $a=\frac{2\pi v}{T}$

繞 $\frac{1}{3}$ 圓周的平均加速度 $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\frac{1}{3}T}=\frac{\sqrt{3}v}{\frac{1}{3}T}=\frac{3\sqrt{3}v}{T}$ $\frac{\bar{a}}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

範例 3

一質量為 m 之物體從地面以 V_0 之初速 60° 的仰角拋出，設運動過程中最小曲率半徑與最大曲率半徑的比為多少？

【答】: 1：8

【解】

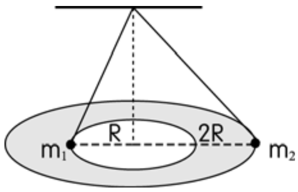
主題二：向心力

1. 畫出物體的受力
2. $//\vec{r}$ ：合力 = 向心力，向心力 = 質量 × 向心加速度

   $\perp\vec{r}$ ：合力 = 0
3. 向心力是合力，向心力不是第三個力

範例 4

如圖，m_1、m_2 在同一水平面作錐動擺，即 m_1、m_2 繞同一鉛垂線在同一水平面作等速率圓周運動。m_1 的旋轉半徑為 R，m_2 的旋轉半徑為 $2R$。下列敘述，哪些正確？ (A) m_1、m_2 的週期比為 1：2 (B) m_1、m_2 的速率比為 1：2 (C) m_1、m_2 的向心加速度大小比為 2：1 (D) m_1、m_2 的角速率相等 (E) m_1 所受的繩子張力比 m_2 所受的繩子張力大。



【答】：(B)(D)

【解】

立即練習

1. 一彈簧長 L，懸一質量 m 的物體，靜止時長度為 $1.5L$，使此裝置作圓錐擺運動，彈簧長則變為 $2L$，重力加速度為 g；求物體圓周運動的頻率 f 為若干？ (A) $2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{L}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ (E) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2L}}$ 。

【答】：(D)

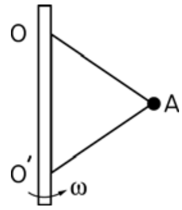
【解】：(1) $0.5Lk = mg \quad \Rightarrow \frac{2m}{k} = \frac{L}{g}$

(2)彈力 $F = kL$，迴轉半徑 $r = 2L\sin\theta$

$$F\sin\theta = \frac{m4\pi^2 r}{T^2} \quad kL\sin\theta = \frac{m4\pi^2(2L\sin\theta)}{T^2}$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

2. 如圖所示，質量為 m 的小球 A 用兩根長度均為 L 的細線繫在鉛直軸上的 O、O' 兩點，O 與 O' 的間距也是 L，當鉛直軸以一定的角速度等速轉動時，小球 A 繞軸作等速圓周運動，則當鉛直軸的角速度為何時，$O'A$ 的張力恰好等於零。



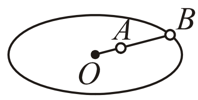
【答】：$\sqrt{\dfrac{2g}{L}}$

【解】：設 OA 的張力為 T

$$\begin{cases} T\cos 60° = mg \\ T\sin 60° = m\omega^2(L\sin 60°) \end{cases} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

範例 5

有 A、B 兩物以細繩相連，在光滑水平面上作角速度相同的等速率圓周運動，如右圖，若 A、B 質量比為 1 : 3，$\overline{OA} = \overline{AB}$ 且 A、B 間繩子張力為 F，則 O、A 間繩子之張力為　(A) F　(B) $\dfrac{5F}{4}$　(C) $\dfrac{3F}{2}$　(D) $\dfrac{7F}{6}$　(E) $2F$。

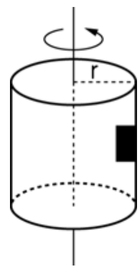


【答】：(D)

【解】

立即練習

1. 如圖所示，圓柱筒半徑為 r，物體與筒壁靜摩擦係數為μ_s，欲使物體緊貼筒壁不掉下，則圓柱筒繞中心軸轉動之最小角速度 ω_{min} 為若干？　(A) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{r\mu_s}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{g}{r\mu_s}}$　(C) $\sqrt{\dfrac{r\mu_s}{g}}$　(D) $2\pi\sqrt{\dfrac{r\mu_s}{g}}$　(E) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{r\mu_s}{g}}$ 。

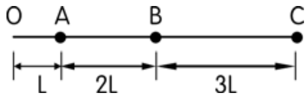


【答】：(B)

【解】：物體以正向力 N 作向心力 $m\omega^2 r$

物體不致落下：$mg = f_s \le \mu_s N = \mu_s m\omega^2 r$　$\therefore \omega \ge \sqrt{\dfrac{g}{\mu_s r}}$

2. 如圖，A、B、C 三球之質量均為 m，分別以三段長為 L、$2L$、$3L$ 不計質量之繩聯結，今以 O 為圓心，在光滑水平面上作等速率圓周運動，若 BC 間之細繩張力為 $18mg$，則：



(1)角速度為【　　　　　】。

(2) OA 間之細繩張力為【　　　　　】。

【答】: (1)$\sqrt{\dfrac{3g}{L}}$　(2) $30mg$

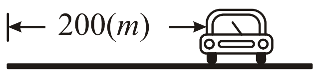
【解】: (1)張力＝向心力　$18mg = m\omega^2(6L)$　$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$

(2) $T_{AB} - 18mg = m\omega^2(3L)$　$\therefore T_{AB} = 27mg$

$T_{OA} - T_{AB} = m\omega^2 L$　$\therefore T_{OA} = 30mg$

範例 6

一輛汽車以 72(km/h)的時速通過半徑為 200(m)的水平彎道路。若該輛汽車可以安全過彎，則地面與輪胎間的靜摩擦係數至少為【　　　　　】($g = 10m/s^2$)。



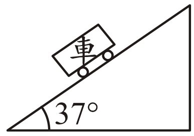
$v = 72(km/h)$

【答】: 0.2

【解】

範例 7

一車質量 m，在與地面夾角 37°的車道上轉彎，若彎道曲率半徑為 120 公尺，車輪與斜面靜摩擦係數為 $\dfrac{1}{3}$，則(假設= 10m/s2)　(A)車的安全速度最小為 20m/sec　(B)車安全速度最小為 25m/sec　(C)車的安全速度最大為 40m/sec　(D)當車子在最小安全速度時，斜面施予車子的正向力恰為車重　(E)當車子在最小安全速度或最大安全速度下行駛，其摩擦力均與前進方向平行。

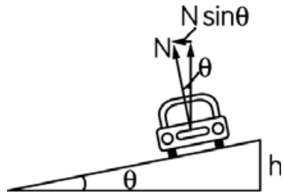


【答】: (A)(D)

【解】

立即練習

假設公路在水平面上迴轉半徑 $R = 1000\ m$，行車速率為 $72km/hr$，路寬為 $40m$，則：



(1)路之內外側高度差為【　　　　】m，恰可使行駛車輛不靠摩擦力轉彎。($g = 10m/s^2$)

(2)若路面不傾斜，則摩擦係數應為【　　　　】才能行車。

【答】：(1) 1.6　(2) 0.04

【解】：(1) $v = 72km/hr = 20m/s$

藉正向力 N 的水平分量 $N\sin\theta$ 作為向心力

$$\begin{cases} N\sin\theta = \dfrac{mv^2}{R} \\ N\cos\theta = mg \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{20^2}{10\times1000} = \frac{4}{100}$$

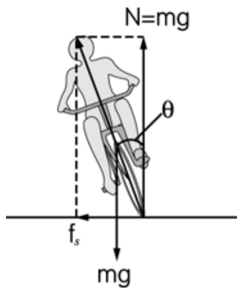
$$h = 40\sin\theta \fallingdotseq 40\tan\theta = 40\times\frac{4}{100} = 1.6(m)$$

(2) $\mu mg = \dfrac{mv^2}{\mathrm{R}}$

$$\mu = \frac{v^2}{gR} = \frac{4}{100} = 0.04$$

範例 8

一人騎腳踏車以 $10m/s$ 的速度前進，當其進入水平彎路後車身傾斜一角度，若彎路之曲率半徑為 $20m$，則：($g = 10m/s^2$)



(1)車身與鉛直方向所成之角度為θ，則 $\tan\theta$=【　　　　】。

(2)車輪與路面摩擦係數最小須為【　　　　】。

【答】：(1)$\dfrac{1}{2}$　(2) 0.5

【解】：以靜摩擦力作為轉彎所需之向心力

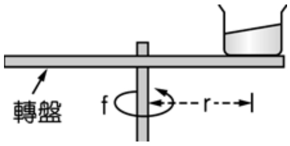
$$f_s = \frac{mv^2}{R} \le \mu_s mg \cdots ①$$

且$\dfrac{f_s}{mg} = \tan\theta \Rightarrow \dfrac{v^2}{gR} = \tan\theta \quad \therefore \tan\theta = \dfrac{10^2}{10\times20} = \dfrac{1}{2}$

由①　$\Rightarrow \mu_s \ge \dfrac{v^2}{gR} = \dfrac{1}{2}$

難題挑戰

如圖，盛有液體之小玻璃杯置於轉盤上且固定之，杯中心距轉軸為 r，當轉盤轉動頻率為 f 時，液面傾斜角 $\tan\theta$=【　　　　】。

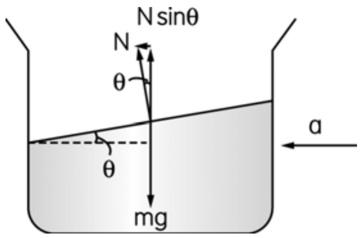


【答】：$\dfrac{4\pi^2 rf^2}{g}$

【解】：$a=\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}=4\pi^2 r\cdot f^2$

$$\begin{cases} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = ma \end{cases} \Rightarrow \tan\theta=\frac{a}{g}$$

而水面傾斜角 $\tan\theta=\dfrac{a}{g}=\dfrac{4\pi^2 rf^2}{g}$



吳笛物理段考複習講義－簡諧運動

1. 已知 t 求 x, v, a：

   簡諧 是 等速圓周 的投影

x	$=$	R	$\cos(\omega t+\phi)$
v	$=$	$-\omega R$	$\sin(\omega t+\phi)$
a	$=$	$-\omega^2 R$	$\cos(\omega t+\phi)$

2. 已知 x 求 v, a：

   $v=\pm\omega\sqrt{R^2-x^2}$

   $a=-\omega^2 x$

3. 最大值公式：(與等速圓周相同)

   $v_{\max}=\omega R=\dfrac{2\pi R}{T}$

   $a_{\max}=\omega^2 R=\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}=\dfrac{v_{\max}^2}{R}$

4. 簡諧運動週期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

範例 1

作 S.H.M 之質點其位置與時間的關係為 $x=5\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6})$

則其 (1)振幅　(2)週期　(3)最大速率 $v_{\max}$　(4)最大加速度 $a_{\max}$

(5)由開始計時($t=0$)到位移為振幅之一半處至少需時若干？

【答】：(1) 5　(2) 4　(3) $\frac{5}{2}\pi$　(4) $\frac{5}{4}\pi^2$　(5) $\frac{1}{3}$ 秒

【解】

範例 2

一質點作 S.H.M.，當距平衡點 4 公尺時，其速率為 6 公尺/秒，距平衡點 3 公尺時，其速率為 8 公尺/秒，求：

(1)振幅為【　　　　　】公尺。

(2)週期為【　　　　　】秒。

(3)最大加速度值為【　　　　　】公尺/秒 ^{2}。

(4)自距平衡點 4 公尺運動至 3 公尺，所經歷之最短時間為【　　　　　】秒。

【答】：(1) 5　(2) π　(3) 20　(4) 0.14

【解】

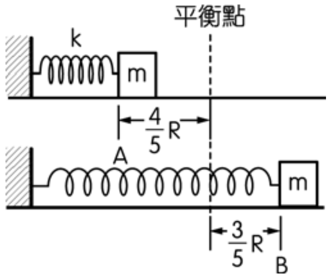
範例 3

一質點作 S.H.M.，已知其在距平衡點為 0.5 米處之加速度量值為 $2\pi^2$ 米/秒 ^{2}。如該質點自平衡點朝某端點運動，其前半段路程(半個振幅)需耗時多久？　(A) $\frac{1}{12}$ 秒　(B) $\frac{1}{6}$ 秒　(C) $\frac{1}{3}$ 秒　(D) $\frac{\pi}{6}$ 秒　(E)振幅不詳，無法得知。

【答】：(A)

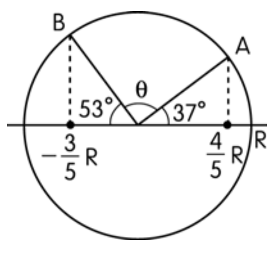
【解】

立即練習



如圖所示，質量 m 的物體在光滑水平面上作 S.H.M.，振幅為 R，則由圖中 A 點運動至 B 點，歷時最少需為【　　　　　】。(彈簧的彈力常數為 k)

【答】：$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$



【解】：如圖所示，由 A 點運動至 B 點，最小角位移 $\Delta\theta = 90°$

$$t = T \times \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

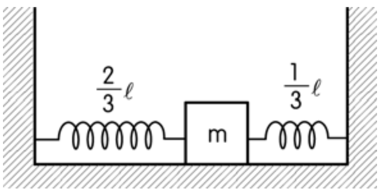
範例 4

質點作振幅 R 的簡諧運動，已知其距平衡點 $\frac{R}{2}$ 處之速率為 v，則此質點 (A)速率最大值為 $\frac{2v}{\sqrt{3}}$ (B)加速度最大值 $\frac{4v^2}{3R}$ (C)週期為 $\frac{\pi R}{v}$ (D)通過平衡點瞬間加速度為零 (E)距平衡點 $\frac{3R}{5}$ 處之速率為 $\frac{4v}{5}$。

【答】：(A)(B)(D)

【解】

範例 5



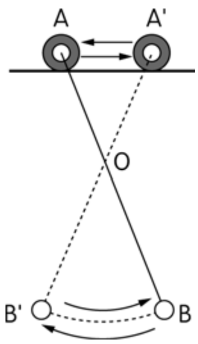
一彈力常數 20N/m、長為 ℓ 的彈簧，被剪成兩段長度分別為 $\frac{2}{3}\ell$ 及 $\frac{\ell}{3}$ 後，與質量 10kg 的物體，以如圖所示的方式連接(物體置於光滑平面上)。若令物體作振幅 10cm 的簡諧運動，則：

週期為【　　　　】秒。

【答】：$\frac{2}{3}\pi$

【解】

難題挑戰



如圖所示，在光滑橫桿上有一個滾輪 A，質量為 $2M$，輪上繫有一長為 L 的線，下端懸掛一個擺球 B，質量為 M。放手後擺球作小幅度振動，其振動週期為 (A) $\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (B) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (C) $2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$ (D) $2\pi\sqrt{\frac{3L}{2g}}$ (E) $2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$。

【答】：(E)

【解】：質心 O 點位置不動，距 B 點 $\frac{2}{3}L$，可視為以 O 為固定點，

擺長為 $\frac{2}{3}L$ 的單擺

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$